Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\cos(x) + b\cdot\text{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Solución

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\cos(x) + b\cdot\text{sen}(x)}{x^3} = \left(\dfrac{0}{0};L'H\right)$, Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H. Si f(x) y g(x) son continuas en [a – r, a + r], derivables en (a – r, a + r), con f(a) = g(a) = 0, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar y también es cierta cuando salga ∞/∞, y cuando $x \to \infty$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x) + b\cdot\text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\cdot\text{sen}(x) + b\cdot\cos(x)}{3x^2} = \frac{1+b}{0}$$

Como dicen que existe el límite tendríamos que tener 0/0, para poder seguir aplicándole la regla L'H, de donde 1 + b = 0, **por tanto b = -1**, y tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\cdot\text{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \{\text{simplifico}\} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cdot\text{sen}(x)}{3x^2} = \{\text{Infinitésimos}\} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cdot(x)}{3x^2} =$$

$= \{\text{simplifico}\} = \lim_{x\to 0} (-1/3) =$ **-1/3.**

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2013

Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

a) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

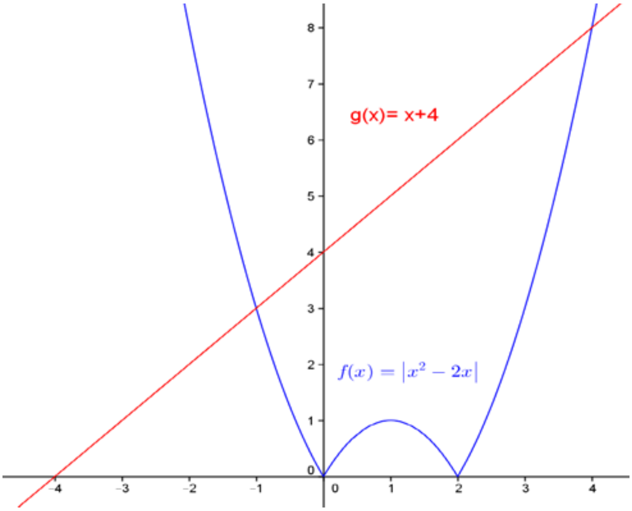
$f(x) = |x(x-2)| = |x^2 - 2x| = |h(x)|$

Dibujamos primero la grafica de $h(x) = x^2 - 2x$, que es una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el nº que anula la 1ª derivada, es decir $h'(x) = 2x - 2 = 0$, de donde x = 1 y el vértice es $V(1, h(1)) = V(1,(1)^2 - 2(1)) =$ = V(1,-1), que es el mínimo de la parábola y un máximo relativo del valor absoluto; puntos de corte en (0,0) y (2,0), pues los valores de "x" que anulan $x^2 - 2x = x(x-2)$ son x = 0 y x = 2.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto |h(x)| es la misma que la de h(x), si $h(x) \geq 0$ (la gráfica está por encima del eje de abscisas OX), y simétrica respecto al eje OX, es decir gráfica de – h(x), si h(x) < 0 (la gráfica está por debajo del eje de abscisas OX).

La gráfica de g(x) = x + 4 es la de una recta que pasa por los puntos (0,4) y (-4,0)

Temiendo en cuenta lo anterior un esbozo de sus gráficas es



Si observamos la grafica vemos que la recta corta sólo a la parte de la parábola que está por encima del eje de abscisas, por tanto para calcular los puntos de corte igualaremos x + 4 a $x^2 - 2x$.

Antes de hacerlo abrimos el valor absoluto, pues nos hará falta para calcular el área. (los puntos de división eran las soluciones de $x^2 - 2x = 0$, que nos salió x = 0 y x = 2.

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Resolvemos ya $x + 4 = x^2 - 2x$, es decir $0 = x^2 - 3x - 4$.

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$, de donde las abscisas de los cortes son x = -1 y x = 4, y los puntos de corte (-1,3) y (4,8).

a)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Para calcular el área observando la figura la tenemos que obtener como suma de tres regiones, una es desde -1 a 0 otra desde o a 2 y la tercera desde 2 a 4

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} (x+4 - (x^2 - 2x))dx + \int_0^2 (x+4 - (-x^2 + 2x))dx + \int_2^4 (x+4 - (x^2 - 2x))dx =$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4)dx + \int_0^2 (x^2 - x + 4)dx + \int_2^4 (-x^2 + 3x + 4)dx =$$
$$= [-x^3/3 + 3x^2/2 + 4x]_{-1}^{0} + [x^3/3 - x^2/2 + 4x]_0^2 + [-x^3/3 + 3x^2/2 + 4x]_2^4 =$$
$$= [(0) - (1/3 + 3/2 - 4)] + [(8/3 - 4/2 + 8) - (0)] + [(-64/3 + 48/2 + 16) - (-8/3 + 12/2 + 8)] =$$
$$= 13/6 + 26/3 + 22/3 = 109/6 \text{ u.a.} \cong 18'1667 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2013

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

(b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m.

(c) [0'75 puntos] Para m = 1, calcula la inversa de M.

Solución

Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

(a)

Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

La matriz M es de orden 3x3, y sabemos que los vectores fila son linealmente independientes si sólo si (sii) el determinante (det ó | |) de la matriz M es distinto de cero.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

$| M | = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 1.[(m+1)(m-1) – 0] – 0 + (-1)[(0) – (m+1)] = m^2 – 1 + m + 1 = m^2 + m.$

Igualando a cero tenemos $0 = m^2 + m = m(m + 1)$, de donde m = 0 y m = -1.

Por tanto si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $| M | \neq 0$ y los vectores fila son linealmente independientes.

(b)

Estudia el rango de M según los valores de m.

Como ya hemos calculado $| M | = m^2 + m$, esto nos sirve para calcular el rango de M.

Si $\mathbf{m \neq 0}$ y $\mathbf{m \neq -1}$, $| M | \neq 0$ y **rango (M) = 3.**

Si **m = 0** tenemos M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En M como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ (he tomado F_1, F_2, C_1 y C_2 para formar el menor), entonces **rango(M) = 2.**

Si **m = -1** tenemos M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

En M como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ (he tomado F_1, F_3, C_1 y C_2 para formar el menor), entonces **rango(M) = 2.**

(c)

Para m = 1, calcula la inversa de M.

Para m = 1, M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sabemos que la inversa de M es $M^{-1} = (1/|M|)\cdot Adj(M^t)$

De $| M | = m^2 + m$, tenemos para m = 1, $| M | = (1)^2 + (1) = 2$

De M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, luego; $M^{-1} = (1/2).\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2013

Sea r la recta que pasa por el punto (1,0,0) y tiene como vector dirección (a,2a,1) y sea s la recta dada por $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
(b) [1'5 puntos] Calcula para a = 1, la distancia entre r y s.

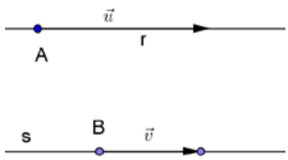
Solución

Sea r la recta que pasa por el punto (1,0,0) y tiene como vector dirección (a,2a,1) y sea s la recta dada por $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

(a)
Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

De la recta r tomamos un punto, el A(1,0,0) y un vector, el **u** = (a,2a,1).
Ponemos la recta s en paramétricas, tomando x = $\lambda \in$ R, de donde y = -2 + 2λ y z = aλ, para obtener un punto y un vector.

$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in$ R. Un punto de s es B(0,-2,0) y un vector es **v** = (1,2,a)

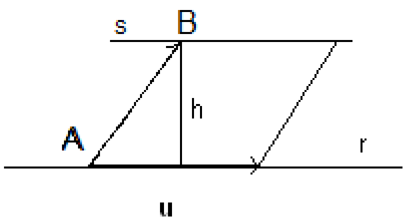


Como nos dicen que las rectas son paralelas, sus vectores son dependientes, es decir sus coordenadas son proporcionales.
De **u** = (a,2a,1) y **v** = (1,2,a), tenemos a/1 = 2a/2 = 1/a, que nos da lugar a dos ecuaciones:
a/1 = 2a/2, de donde a = a
a/1 = 1/a, de donde a^2 = 1 es decir a = ± 1.

Las rectas r y s son paralelas para los valores de "a = ± 1".
(b)
Calcula para a = 1, la distancia entre r y s.

Como ya sabemos para a = 1 las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo.

Por área de un paralelogramo. Es la altura del paralelogramo



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector **u**. De la recta "s" sólo tomamos el punto B

El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AB** es ||**AB**x**u**|| = base·altura = ||**u**||·h, pero la altura "h" es d(s,r) = d(B;r), luego d(B;r) = (||**AB**x**u**||) / (||**u**||)

De "r", punto el A(1,0,0) y vector, el **u** = (1,2,1).
De "s", punto el B(0,-2,0).

AB = (-1, -2,0)

$$\mathbf{AB}\mathrm{x}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(0) = (-2,1,0)$$

$||\mathbf{AB}\mathrm{x}\mathbf{u}|| = \sqrt{(2^2+1^2+0^2)} = \sqrt{(5)}$

$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(1^2+2^2+1^2)} = \sqrt{(6)}$

$d(P;r) = (||\mathbf{AP}\mathrm{x}\mathbf{u}||) / (||\mathbf{u}||) = (\sqrt{(5)}) / (\sqrt{(6)}) = \sqrt{(5/6)}$ u.l.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2013

Sea f : (- ∞,1) → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Solución

(a)

$f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$ es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en x = 0.

Como es continua en x = 0 , $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 0 + 2e^{-0} = 2e^0 = 2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(a\sqrt{b - x}\right) = a\sqrt{b}$

Igualando tenemos $2 = a\sqrt{b}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{b - x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{- a}{2\sqrt{b - x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Como es derivable en x = 0, tenemos $f'(0^+) = f'(0^-)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 - 2e^{-x}) = 1 - 2e^{-0} = 1 - 2 = -1$;

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{- a}{2\sqrt{b - x}}\right) = \dfrac{- a}{2\sqrt{b}}$;

Igualando tenemos $-1 = \dfrac{- a}{2\sqrt{b}}$.

De $2 = a\sqrt{b}$, tenemos $a = \frac{2}{\sqrt{b}}$. Entrando en $-1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$, sale $1 = \frac{2}{2\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{1}{b}$. Por tanto tenemos **b = 1** y **a =** $\frac{2}{\sqrt{1}}$ = **2.**

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Para x = 0, la función es $f(x) = x + 2e^{-x}$ y $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$

La ecuación de la recta tangente en x = 0 es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

La ecuación de la recta normal en x = 0 es $y - f(0) = (-1/f'(0))\cdot(x - 0)$

$f(0) = 0 + 2e^{-0} = 2e^{0} = 2$

$f'(0) = 1 - 2e^{-0} = 1 - 2 = -1$

Luego **la recta tangente en x = 0 es** $y - 2 = -1(x - 0)$ es decir **y = -x + 2.**

Luego **la recta normal en x = 0 es** $y - 2 = (-1/-1)\cdot(x - 0)$ es decir **y = x + 2.**

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Sea $g : R \to R$ definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la *primitiva* de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Solución

Es el ejercicio nº 2 de la Opción B de Junio de 2007

Una primitiva de g(x) es G(x) = $\int g(x)dx + K$

I = $\int g(x)dx = \int ln(x^2+1)dx$ que es una integral por partes ($\int udv = uv - \int vdu$)

$u = \ln(x^2 + 1)$, de donde $du = (2x)/(x^2 + 1)$

dv = dx, de donde v = $\int dx = x$

I = $\int ln(1+x^2)dx = x\cdot\ln(x^2 + 1) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx = x\cdot\ln(x^2 + 1) - 2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = x\cdot\ln(1 + x^2) - 2I_1$.

$I_1 = \int\frac{x^2}{1+x^2}dx$, aunque sencilla es una integral racional (hay que dividir) o poner el numerador en la forma $x^2 = x^2 + 1 - 1$.

$$I_1 = \int\frac{x^2}{x^2+1}dx = \left\{\begin{matrix}\text{sumo un 0 (+1-1)}\\ \text{en el numerador}\end{matrix}\right\} = \int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \left\{\begin{matrix}\text{diviendo por}\\ x^2+1\end{matrix}\right\} = \int\left(1+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx =$$

= x – artag(x).

$I = x\cdot\ln(x^2 + 1) - 2I_1 = x\cdot\ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x))$

Una primitiva es $G(x) = \int g(x)dx + K = x\cdot\ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x)) + K$.

Como nos dicen que la primitiva G(x) pasa por el origen (0,0) tenemos G(0) = 0.

De G(0) = 0, tenemos 0 = 0·Ln(0 + 1) – 2(0 – artag(0)) + K = 0 + K, de donde K = 0 y **la primitiva pedida es** $\mathbf{G(x) = x\cdot\ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x))}$

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2013

Sea A = $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

(a) [1'75 puntos] Comprueba que $A^2 = 2\cdot I$ y calcula A^{-1}.

(b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

Solución

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a)

Comprueba que $A^2 = 2\cdot I$ y calcula A^{-1}.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot I.$$

La matriz inversa A^{-1} de A verifica $A\cdot A^{-1} = I$.

De $A^2 = 2\cdot I$, tenemos $A\cdot A = 2\cdot I$, luego $A\cdot(1/2)A = I$, por tanto tenemos que la matriz inversa de A es: $A^{-1} = (1/2)\cdot A = (1/2)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(b)

Calcula A^{2013} y su inversa.

Tenemos que $A^{2013} = A^{2012}\cdot A = (A^2)^{1006}\cdot A = (2\cdot I)^{1006}\cdot A = (2^{1006})\cdot(I)^{1006}\cdot A =$

$= (2^{1006})\cdot I\cdot A = (2^{1006})\cdot A = (2^{1006})\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$.

Sabemos que $(A.B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ y $(A.A)^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}$ si A y B son cuadradas.

$A^n = A\cdot A\cdot A\cdots\cdots\{n\ veces\}\cdots A\cdot A\cdot A$, con A matriz cuadrada.

$(A^n)^{-1} = (A\cdot A\cdot A\cdots\cdots\{n\ veces\}\cdots A\cdot A\cdot A)^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots\cdots\{n\ veces\}\cdots A^{-1}\cdot A^{-1}$.

Luego la matriz inversa pedida es $(A^{2013})^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots\cdots\{2013\ veces\}\cdots A^{-1}\cdot A^{-1} =$

$= (1/2)\cdot A\cdot(1/2)\cdot A\cdots\cdots\{2013\ veces\}\cdots (1/2)\cdot A\cdot(1/2)\cdot A = \dfrac{1}{2^{2013}}.A^{2013} =$

$$= \frac{1}{2^{2013}}\cdot(2^{1006})\cdot A = \frac{1}{2^{1007}}\cdot A = \frac{1}{2^{1007}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & \frac{-1}{2^{1007}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2013

Considera los puntos P(2,3,1) y Q(0,1,1)

(a) [1'75 puntos] Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

(b) [0'75 puntos] Calcula la distancias de P a π.

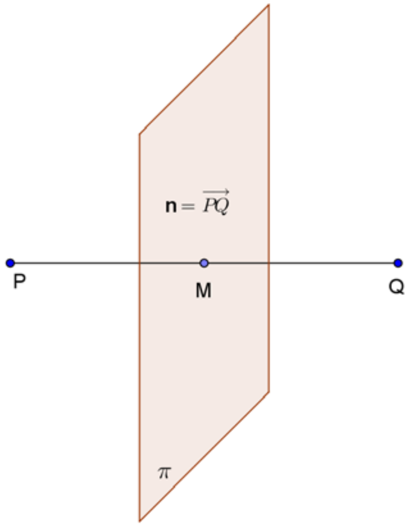
Solución

Considera los puntos P(2,3,1) y Q(0,1,1)

(a)

Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

El plano π respecto del cual son simétricos los puntos P y Q, es el plano mediador del segmento PQ, es decir el plano perpendicular al segmento PQ en su punto medio M.



El plano pedido pasa por el punto medio M((2 + 0)/2, (3 + 1)/2, (1 + 1)/2) = M(1,2,1); y tiene como vector normal el **n** = **PQ** = (2 – 0, 3 – 1, 1 – 1) = (2,2,0).

El plano es el conjunto de puntos X tales que **MX•n** = 0, donde "•" es el producto escalar, es decir:

$\pi \equiv$ **MX•n** = 0 = (x – 1, y – 2, z – 1) •(2,2,0) = 2x – 2 + 2y – 4 = 2x + 2y – 6 = 0. Simplificando tenemos **$\pi \equiv$ x + y – 3 = 0**

(b)

Calcula la distancias de P a π.

Teniendo en cuenta la figura, la distancia de P a π, es la distancia de P al punto medio M, es decir el módulo (|| ||) del vector **PM**, por tanto:

d(P,π) = d(P,M) = ||**PM**|| = ||**MP**|| = $\sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$ u.l.

P(2,3,1), M(1,2,1), **MP** = (2-1, 3-2, 1-1) = (1,1,0)